Vol. 29(2009)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

S^3 亚椭圆算子的谱*

彭小春，陈文艺
(武汉大学数学与统计学院，湖北武汉 430072)

摘要：本文研究了与紧流形 S^3 上的与 Hopf 纤维丛相联系的亚椭圆算子的 谱.利用球调和函数的直和分解，得到了亚椭圆算子的谱和每个特征值所对应的特征空间及其维数.

关键词：Hopf 纤维丛；亚椭圆算子；球调和函数；谱

MR(2000)主题分类号：35M10　　　**中图分类号**：O175.3

文献标识码：A　　　**文章编号**：0255-7797(2009)03-0297-03

1 引言

Hörmander 平方和算子是一类很重要的退化椭圆算子，对它的研究联系到数学的一些其它分支，如几何和复分析.设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是流形 M 上的一组向量场，满足 Hörmander 条件，即 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 及其直到 r 阶的交换子在 M 的每一点有极大秩，则 Hörmander 平方和算子 $\Delta_H = -\sum_{i=1}^{k} X_i^* X_i$ 是亚椭圆的，其中 X_i^* 为 X_i 的共轭.有关亚椭圆算子局部性质的研究可参见 C. Fefferman 和 D. H. Phong[1]，A. Nagel，E. M. Stein 和 S. Wainger[2]，D. Jerison[3] 和徐超江[4] 的工作.而关于整体性问题的研究甚少，在大范围情形下，罗学波、钮鹏程[5]研究了 Heissenberg 群上的不变算子，叶人参、陈文艺[8]研究了 S^3 上与 Hopf 纤维相联系的一个亚椭圆算子的第一非零特征值.本文推广了他们的工作，研究了亚椭圆算子的谱，并得到了每个特征值所对应的特征空间及其维数.取

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in C^2, \mid z_1 \mid^2 + \mid z_2 \mid^2 = 1\},$$

借助复机构，S^1 作用于 S^3 上：$e^{i\theta} \mapsto (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta})$，称为 Hopf 纤维化.设 X_3 为沿着 Hopf 纤维的单位切向量场，取单位向量 X_1, X_2 使得 X_1, X_2, X_3 构成 S^3 上切空间的正交基，那么 X_1, X_2 满足 Hörmander 条件.定义 S^3 上函数 u 的能量泛函为 $E_H(u)$ 为

$$E_H(u) = \int_{S^3} (\mid X_1 u \mid^2 + \mid X_2 u \mid^2) d\sigma,$$

其变分方程为 $\Delta_H u = (-X_1^* X_1 + X_2^* X_2) u_t$，$\Delta_u$ 是亚椭圆的，有离散的特征值 $0 = \lambda_1 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$，我们有如下定理：

定理　紧流形 S^3 上亚椭圆算子的 Δ_H 的谱为 $\sum = \{\lambda_m \mid \lambda_m = 2m, m \geqslant 0\}$. 且对给定的特征值 λ_m，令 $\sigma_m = \{(k,l) \mid \lambda_m = k(k+2) - l^2\}$，则 λ_m 对应的特征空间为 $\oplus_{(k,l)\in\sigma_m} \mathscr{H}_{k,l}$，其实维数为 $\sum_{(k,l)\in\sigma_m} \dfrac{(k+2)^2 - l^2}{4}$.

* **收稿日期**：2008-08-20　　　**接收日期**：2008-12-19
作者简介：彭小春(1980-)，男，湖北荆州，博士生.研究方向：几何分析.

2 亚椭圆算子的构造

在 S^3 上取参数化($e^{i\varphi_1}\sin t, e^{i\varphi_2}\cos t$),其中 $0<t<\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant\varphi_1,\varphi_2\leqslant 2\pi$,则 S^3 上的 Riemann 度量为 $ds^2=dt^2+\sin^2 t d\varphi_1^2+\cos^2 t d\varphi_2^2$. 取 S^3 上的一组向量场

$$X_1=\partial_t, X_2=\frac{\cos^2 t\partial_{\varphi_1}-\sin^2 t\partial_{\varphi_2}}{\sin t\cos t}, X_3=\partial_{\varphi_1}+\partial_{\varphi_2}.$$

则有 X_1,X_2,X_3 为 S^3 上的单位正交基,且 X_3 是 Hopf 纤维的切向. 由 X_1,X_2 满足 Hörmander 条件,则 $\Delta_H u=-(X_1^* X_1+X_2^* X_2)u$ 为 S^3 上的亚椭圆算子. 考虑方程特征值问题:$-\Delta_H u=\lambda u$,显然 $\lambda_0=0$ 为特征值,对应的特征函数是非零常数,特征空间维数为 1. 为研究非零特征值,我们首先考虑 S^3 上的 Laplace 算子 Δ_{S^3},我们知道其特征值为 $\lambda_k=k(k+2)$,相应的特征函数是 k 阶齐次球调和多项式,记 k 阶齐次球调和多项式全体为 $\mathscr{H}_k$,则有直和分解([6]或[7]):

$$L^2(S^3,d\sigma)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k.$$

定义 $\mathscr{H}_k$ 上的变换 τ_θ:$\tau_\theta f(z_1,z_2)=f(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)$,显然,在此变换下,Laplace 方程不变,从而 τ_θ 是 $\mathscr{H}_k$ 上的正交变换,由此得到 $\mathscr{H}_k$ 的直和分解([6]或[7]):

$$\mathscr{H}_k=\bigoplus_{l=-k}^{k}\mathscr{H}_{k,l},$$

这里,$f\in\mathscr{H}_{k,l}$意味着 f 是 l 次齐次调和多项式且 $\tau_\theta f=e^{il\theta}f$. 我们有下面的引理:

引理 1 设 $f\in\mathscr{H}_{k,l}$,则有 $X_3 f=\frac{d}{d\theta}|_{\theta=0}\tau_\theta f=ilf$.

证 只须证第一个等式. 事实上,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)|_{\theta=0}\\&=\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i(\varphi_1+\theta)}\sin t,e^{i(\varphi_2+\theta)}\cos t|_{\theta=0})=(\frac{\partial f}{\partial\varphi_1'}\cdot\frac{\partial\varphi_1'}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial\varphi_2'}\cdot\frac{\partial\varphi_2'}{\partial\theta})|_{\theta=0}\\&=\partial_{\varphi_1}f+\partial_{\varphi_2}f=X_3 f,\end{aligned}$$

其中 $\varphi_1'=\varphi_1+\theta$,$\varphi_2'=\varphi_2+\theta$,引理得证.

3 定理的证明

首先证明如下引理.

引理 2 $\mathscr{H}_{k,l}$为非零空间当且仅当k,l奇偶性相同,且

当 $l\neq 0$ 时,$\dim_R(\mathscr{H}_{k,l}\oplus\mathscr{H}_{k,-l})=\frac{(k+2)^2-l^2}{2}$; 当 $l=0$ 时,$\dim_R\mathscr{H}_{k,0}=\frac{(k+2)^2}{4}$.

证 若 $f(z_1,z_2)=z_1^\alpha z_2^\beta\bar{z}_1^\gamma\bar{z}_2^\delta\in\mathscr{H}_{k,l}$,其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in N$,则由 $\mathscr{H}_{k,l}\subset\mathscr{H}_k$ 及 $\tau_\theta f=e^{il\theta}f$ 知

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=k,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta=l.$$

即

$$\alpha+\beta=\frac{k+l}{2},\ \gamma+\delta=\frac{k-1}{2}.$$

从而 $\mathscr{H}_{k,l}$为非零空间当且仅当k,l奇偶性相同,且 k,l 同奇偶时,

$$\mathscr{H}_{k,l}=\mathrm{Span}_C\{z_1^\alpha z_2^\beta\bar{z}_1^\gamma\bar{z}_2^\delta\mid\alpha+\beta=\frac{k+l}{2},\ \gamma+\delta=\frac{k-l}{2},\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N\}.$$

此时 $z_1^\alpha z_1^\beta\bar{z}_1^\gamma\bar{z}_2^\delta$ 的取法共有$(\frac{k+l}{2}+1)(\frac{k-l}{2}+1)=\frac{(k+2)^2-l^2}{4}$种,且相互复线性无关. 显然,可由 $z\mapsto\bar{z}$ 建立从 $\mathscr{H}_{k,l}$到 $\mathscr{H}_{k,-l}$的线性同构,从而 $\mathscr{H}_{k,l}\oplus\mathscr{H}_{k,-l}$可看作

$$\mathrm{Span}_R\{\mathrm{Re}z_1^\alpha z_2^\beta\bar{z}_1^\gamma\bar{z}_2^\delta,\ \mathrm{Im}z_1^\alpha z_2^\beta\bar{z}_1^\gamma\bar{z}_2^\delta\mid\alpha+\beta=\frac{k+l}{2},\ \gamma+\delta=\frac{k-l}{2},\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N\},$$

从而得到

$$\dim_R(\mathscr{H}_{k,l} \oplus \mathscr{H}_{k,-l}) = \frac{(k+2)^2 - l^2}{2},\ l \neq 0,$$

$$\dim_R \mathscr{H}_{k,0} = \frac{(k+2)^2}{4}.$$

推论 上节的直和分解可重新记为 $\mathscr{H}_k = \bigoplus_{|l| \leqslant k, l \equiv k(\mathrm{mod} 2)} \mathscr{H}_{k,l}$.

定理的证明 $\forall u \in \mathscr{H}_{k,l}$，由 u 调和，即 $-\Delta_{S^3} u = k(k+2)u$.
又由 X_1, X_2, X_3 单位正交有

$$-\Delta_{S^3} u = X_1^* X_1 u + X_2^* X_2 u + X_3^* X_3 u = -\Delta_H u + X_3^* X_3 u.$$

由 $X_3 = \partial_{\varphi_1} + \partial_{\varphi_2}$，$X_3^* = -X_3$，再由引理 1，有 $X_3^* X_3 u = l^2 u$. 由上述三式有

$$-\Delta_H u = -\Delta_{S^3} u - X_3^* X_3 u = (k(k+2) - l^2)u,$$

由引理 2，k,l 同奇偶时，$\mathscr{H}_{k,l}$非空. $\lambda_{k,l} = k(k+2) - l^2$ 为 Δ_H 的特征值，$H_{k,l}$为$\lambda_{k,l}$的特征空间. 显然 $\lambda_{k,l}$为偶数且$\lambda_{k,k} = 2k$，从而 Δ_H 的谱为 $\sum = \{\lambda_m \mid \lambda_m = 2m, m \geqslant 0\}$，$\lambda_m$ 对应的特征空间为$\bigoplus_{(k,l) \in \sigma_m} \mathscr{H}_{k,l}$，其维数

$$\dim_R(\bigoplus_{(k,l) \in \sigma_m} \mathscr{H}_{k,l}) = \dim_R(\bigoplus_{(k,l) \in \sigma_m, l \neq 0} (\mathscr{H}_{k,l} \oplus \mathscr{H}_{k,-1})) + \dim_R(\bigoplus_{(k,0) \in \sigma_m} \mathscr{H}_{k,0})$$

$$= \sum_{(k,l) \in \sigma_m} \frac{(k+2)^2 - l^2}{4}.$$

定理证完.

参考文献：

[1] Fefferman C, Phong D H. Subelliptic eigenvalue problems[M]. Proceeding of the Conference on Harmonic Analysis, in honor of A. Zygmund, Wadsworth. Series, 1981, 590-606.

[2] Nagel A, Stein E M, Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties[J]. Acta Math., 1985, 155: 103-147.

[3] Jerison D. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition[J]. Duke Math., 1986, 53: 503-523.

[4] Xu C J. Regularity for quasilinear second order subelliptic equations[J]. Comm. P. A. M., 1992, 45: 77-96.

[5] Luo X B, Niu P C. The spectrum of the Kohn-Laplace Operator[J]. Chinese J. Comtemp. Math., 1999, 20(2): 281-287.

[6] Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.

[7] 苗长兴. 调和分析及其在偏微分方程中的应用[M]. 北京：科学出版社，1999.

[8] 叶人珍，陈文艺. 亚椭圆算子的第一特征值问题[J]. 数学杂志，2004，24(5)：570-572.

THE SPECTRUM OF SUBELLIPTIC OPERATORS ON S^3

PENG Xiao-chun, CHEN Wen-yi

(*School of Math. and Statistics, Wuhan University, Wuhan* 430072, *China*)

Abstract: In this paper, we study the spectrum of the subelliptic operator based on the Hopf fibration on the sphere of dimension 3. By means of the direct decomposition of spherical harmonic function, the spectrum and the dimension of all the eigen-spaces are obtained.

Keywords: Hopf fibration; subelliptic operator; spherical harmonic function; spectrum

2000 MR Subject Classification: 35M10